第７講　３次の極値などについて

7　２つの関数を $f(x)=x^3+3x^2-3x-4$ と $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とし，$g(x)$ は $x=\alpha$ で極大値 M，$x=\beta$ で極小値 m をとるとする．次の各問いに答えよ．

(1)　$M+m=2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ であることを示せ.

(2)　$M-m=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ.

(3)　$f(x)$ の極大値と極小値，それらの和，差をそれぞれ求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　3次の極値などについて

7　a は0でない実数とする．関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となるような a の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a=\pm 1$　　㋑　$a=\pm\dfrac{1}{2}$　　㋒　$a=\pm 2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　3次の極値などについて

7　2つの関数を $f(x)=x^3+3x^2-3x-4$ と $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とし，$g(x)$ は $x=\alpha$ で極大値 M，$x=\beta$ で極小値 m をとるとする．次の各問いに答えよ．

(1)　$M+m=2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ であることを示せ．

(2)　$M-m=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ．

(3)　$f(x)$ の極大値と極小値，それらの和，差をそれぞれ求めよ．

【答】　(1) 略　(2) 略　(3) 極大値，極小値，和，差は順に $1+4\sqrt{2}$，$1-4\sqrt{2}$，2，$8\sqrt{2}$

【解答】

(1)　$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より $g'(x)=3x^2+2ax+b$ であるので，$g(x)$ が極値をもつ条件は $a^2-3b>0$ であり，$g'(x)=0$ の異なる2解が α と β であるから解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}a$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{3}b$ である．

このとき $g(x)$ の増減は

x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗		↘		↗

となるので $x_1=\alpha$，$x_2=\beta$ である．

ここで，$g(x)=g'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\dfrac{2}{9}(3b-a^2)x+\left(c-\dfrac{1}{9}ab\right)$ であるので

$$\begin{aligned}M+m&=g(\alpha)+g(\beta)\\&=\frac{2}{9}(3b-a^2)(\alpha+\beta)+2\left(c-\frac{1}{9}ab\right)\\&=\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c\end{aligned}$$

となる．一方，$2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=2g\left(-\dfrac{1}{3}a\right)=\dfrac{4}{27}a^3-\dfrac{2}{3}ab+2c$ であるから，

$M+m=2g\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ は示された．

(2)　$M-m=\Big[g(x)\Big]_\beta^\alpha=\displaystyle\int_\beta^\alpha g'(x)dx=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

(3)　$f(x)=x^3+3x^2-3x-4$ より $f'(x)=3x^2+6x-3$ であるので，$f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となる．また，$f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\right)-4x-3$ より

極大値　$f(-1-\sqrt{2})=\mathbf{1+4\sqrt{2}}$，極小値　$f(-1+\sqrt{2})=\mathbf{1-4\sqrt{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

極大値と極小値の和は　$(1+4\sqrt{2})+(1-4\sqrt{2})=\mathbf{2}$

極大値と極小値の差は　$(1+4\sqrt{2})-(1-4\sqrt{2})=\mathbf{8\sqrt{2}}$

≪別解≫

$f'(x)=3x^2+6x-3$ について，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=3^2-3\times(-3)>0$ より $f'(x)=0$ は異なる２つの実数解 p，$q\,(p<q)$ をもつので，$f(x)$ の極大値を $N=f(p)$，極小値を $n=f(q)$ とおくと，解と係数の関係より

$$p+q=-2,\quad pq=-1$$

よって

$$(q-p)^2=(p+q)^2-4pq=8$$

$$\therefore\quad q-p=2\sqrt{2}$$

であるから，(1)，(2)により $f(x)$ の極大値と極小値の和，差は

$$\text{和}\quad N+n=2f\left(\frac{p+q}{2}\right)=2f(-1)=\mathbf{2}$$

$$\text{差}\quad N-n=\frac{1}{2}(q-p)^3=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^3=\mathbf{8\sqrt{2}}$$

また，これより

$$2N=(N+n)+(N-n)=2+8\sqrt{2}\qquad\therefore\quad\text{極大値}\quad N=\mathbf{1+4\sqrt{2}}$$

$$2n=(N+n)-(N-n)=2-8\sqrt{2}\qquad\therefore\quad\text{極小値}\quad n=\mathbf{1-4\sqrt{2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　３次の極値などについて

7　a は 0 でない実数とする．関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となるような a の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a=\pm 1$　　㋑　$a=\pm\frac{1}{2}$　　㋒　$a=\pm 2$

【答】 ㋐

【解答】

与式より

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$
$$=3x^3-3\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-4x+4\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

これより

$$f'(x)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

である．$f'(x)$ の 2 次の係数が正で $f'(0)<0$ より $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつが，それらを α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，2 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad \alpha\beta=-\frac{4}{9}$$

このとき

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\frac{4}{9}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{16}{9}$$

ここで，$x=\alpha$，$x=\beta$ のときそれぞれ極大値，極小値をとるので

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)dx$$
$$=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=9\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3$$
$$=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}$$

となり，ゆえに求める a の値は $a-\frac{1}{a}=0$ より　$\boldsymbol{a=\pm 1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。